JEUX



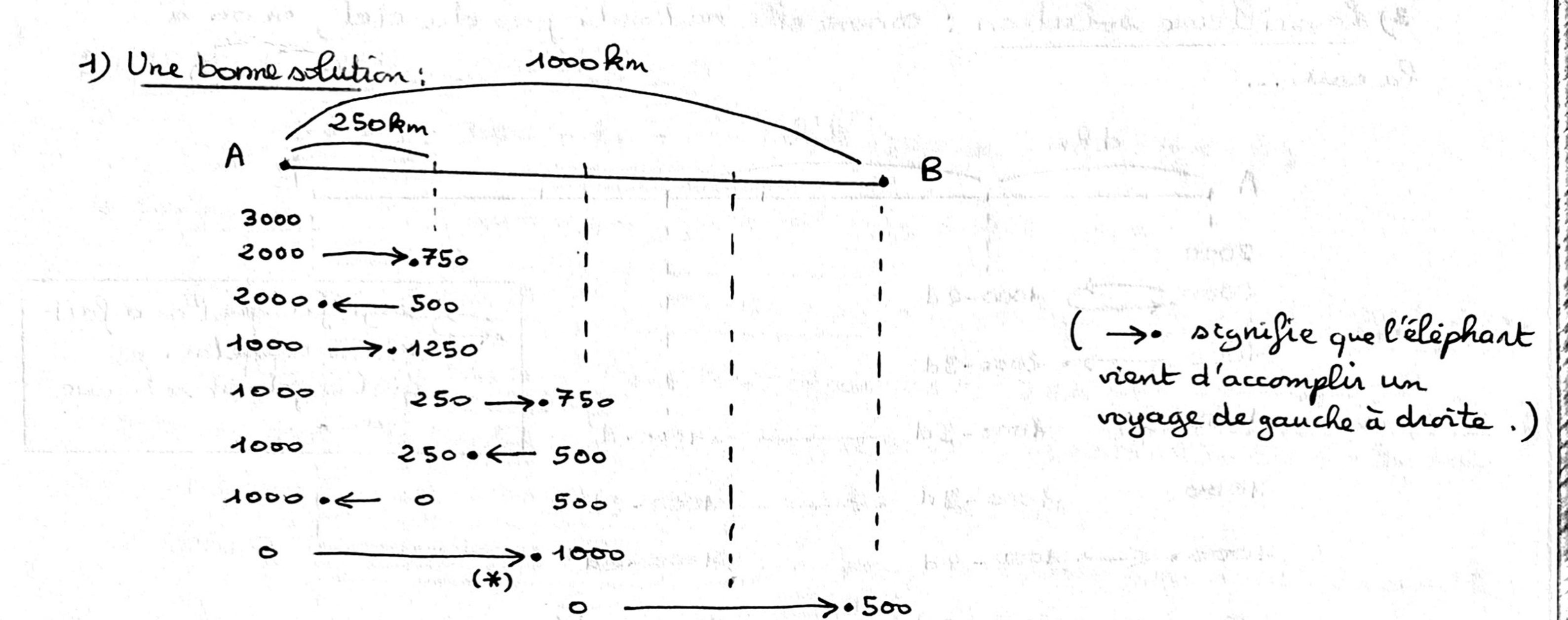
Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Un exploitant veut faire transporter ses 3000 bananes de la ville A à la ville B situées à 1000 km l'une de l'autre, en utilisant un éléphant. Cet éléphant mange 1 banane par kilomètre, et ne peut transporter plus de 1000 bananes sur son dos.

Combien de bananes pourront atteindre la ville B ?

1) Une bonne solution :



2) Recherche de la meilleure solution :

* Notons bien que l'éléphant est obligé de procéder par étapes, ie de constituer des tas le long du chemin.

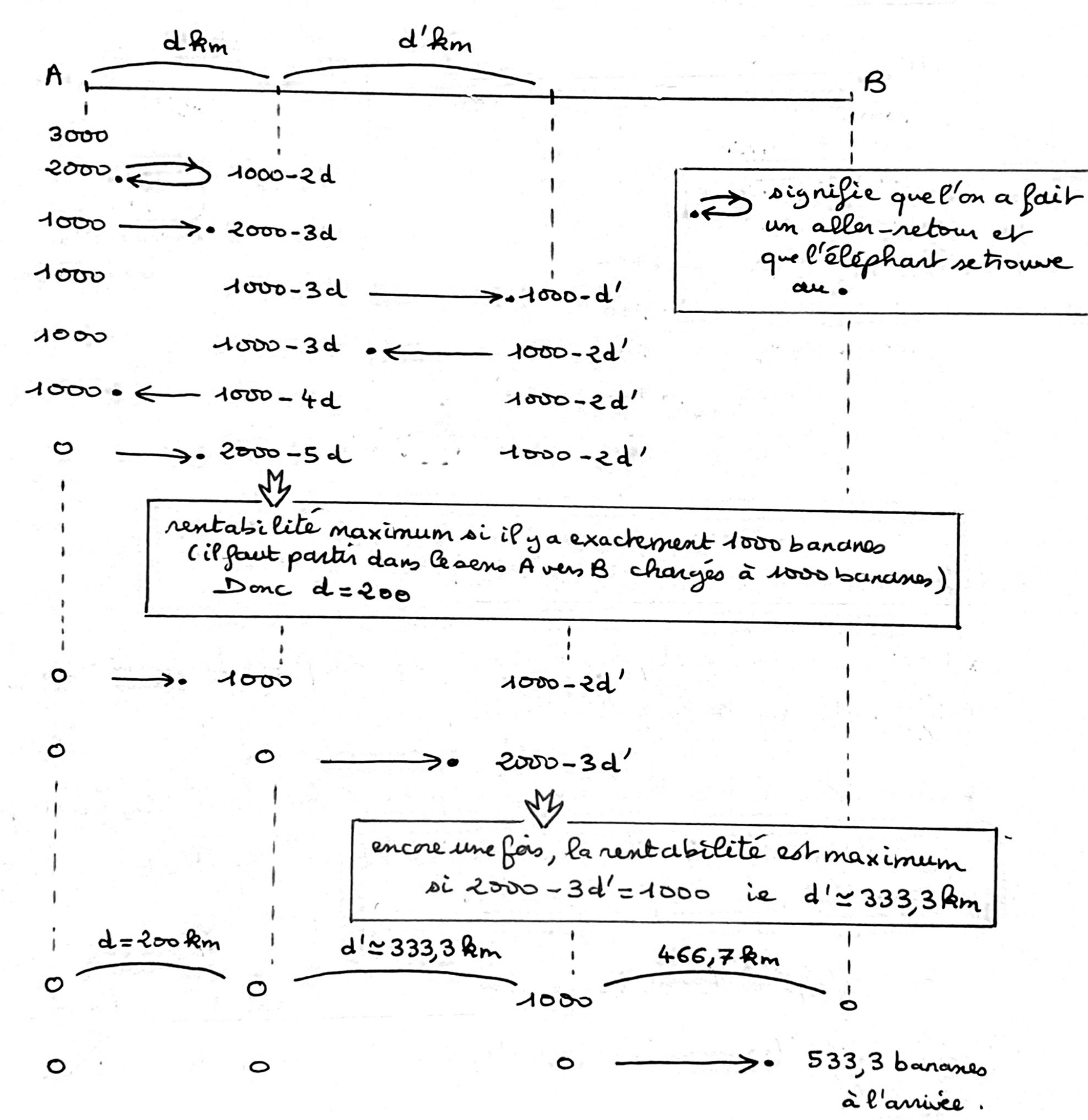
* La meilleure solution est celle pour laquelle l'éléphant parcourt la distance la plus petite en remplissant son contrat, ie en transportant le plus de bananes en B. Ce sera le cas si :

a) L'éléphant est toujours chargé au maximum (1000 bananes) dans le sens "A vers B" et au départ de chacun de ses tas.

b) L'éléphant arrive toujours à vide à l'un des tas déjà formés lorsqu'il se dirige dans le sens "B vers A".

Ainsi, la solution précédente n'est pas la meilleure puisque l'éléphant parcourt l'étape (*) en partant avec seulement 750 bananes dans le sens A vers B.
C'était néanmoins une bonne solution car il s'agit là du seul manquement aux conditions a) et b).

3) La meilleure solution : comme elle ne tombe pas du ciel, on va à la cave...

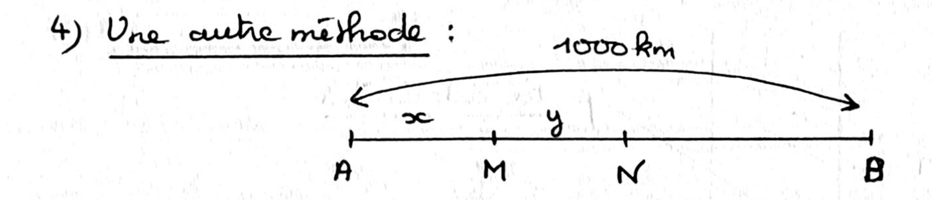


Conclusion : On ne peut pas obtenir plus de 533,3 bananes en B.
La distance parcourue par l'éléphant est alors environ :

$$5d + 3d' + 466,7 \simeq 2466,7 \text{ km}$$

.../...

4) Une autre méthode :



* Hypothèses de travail : 2 arrêts, 3 départs de A avec 1000 ban. sur le dos.
1er départ : constitution du tas M à x km de A, puis retour.
2e départ : " " N à $x+y$ km de A, " .

* Nombre de bananes arrivant en B :

$$N(x,y) = 3000 - 2x - 2(x+y) - 1000 = 2000 - 4x - 2y$$

* Contraintes : Mis à part $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x+y \leq 1000$, on a :

• Constitution du tas M : $\boxed{1000 - 2x \geq 0}$ (1). Le tas M comprend $1000-2x$ ban.

• Constitution du tas N : Après le 2e départ de A, on arrive en M avec $1000 - x$ ban. Le tas M comprend alors $(1000-2x) + (1000-x) = 2000 - 3x$ ban. On part vers B avec 1000 ban. pour constituer le tas N.
Condition : $\boxed{2000 - 3x \geq 1000}$ (2) pour pouvoir partir avec 1000 ban. de M.

On laisse $1000 - 2y$ ban. en N. On retourne en M avec 0 ban. et on repart en A. Arrivé en A, le tas M comprend $2000 - 3x - 1000 - x = 1000 - 4x$ ban.

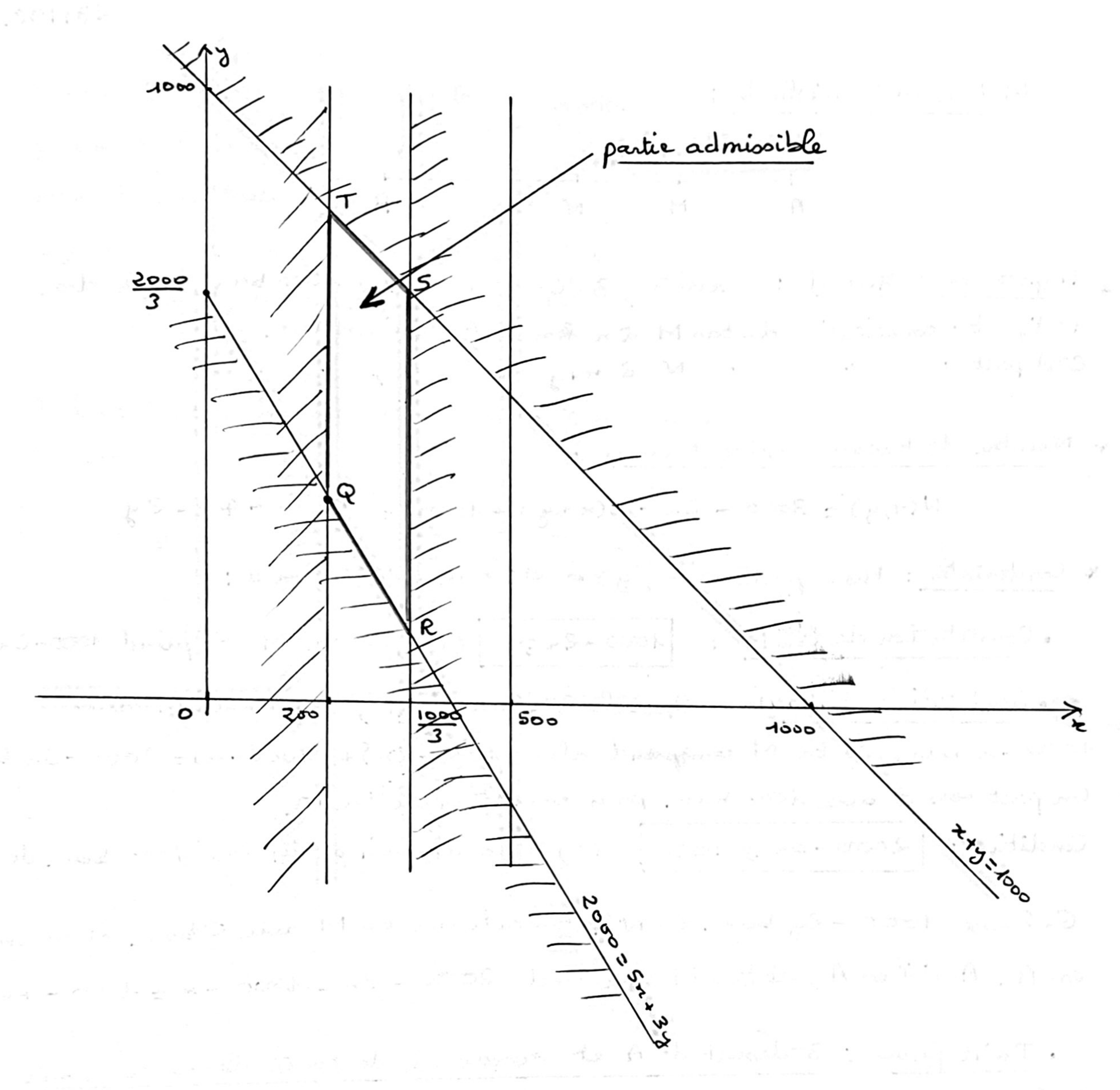
• Trajet final : 3e départ de A et ramassage de toutes les bananes sur le chemin.

L'éléphant part de A avec 1000 ban., arrive en M : il y a alors $1000 - x + (1000 - 4x)$ ban, soit $2000 - 5x$ ban.
Condition : $\boxed{2000 - 5x \leq 1000}$ (3).
On arrive ensuite en N : il y aura $1000 - 2y + (2000 - 5x - y)$ soit $3000 - 5x - 3y$ ban. en N. La condition pour qu'il ne reste qu'un voyage est :

$\boxed{3000 - 5x - 3y \leq 1000}$ (4)

On arrive en B avec :

$(3000 - 5x - 3y) - (1000 - x - y) = 2000 - 4x - 2y$ bananes, comme prévu.



Contraintes :

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 1000 \end{cases}$$

(1) $1000 - 2x \geq 0$

(2) $1000 - 3x \geq 0$

(3) $1000 \leq 5x$

(4) $2000 \leq 5x + 3y$

Quantité à maximiser : le nbre de bananes, ~~soit~~ $N(x, y) = 2000 - 4x - 2y$

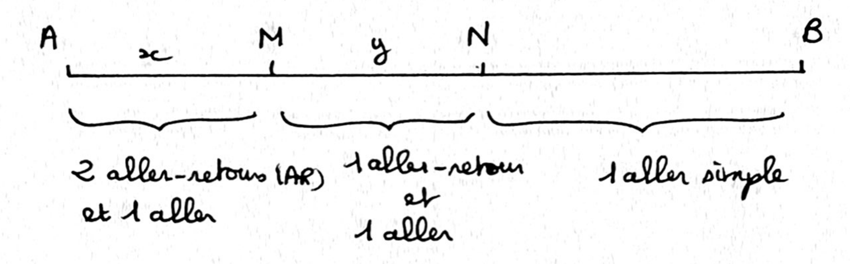
On vérifie facilement que le ~~minimum~~ maximum de $N(x,y)$ sur l'intérieur du quadrilatère QRST est atteint au point $Q\left(200, \frac{1000}{3}\right)$. Le nbre maximum de bananes que l'on réceptionnera sera $N\left(200, \frac{1000}{3}\right) \simeq 533,33$, et les tas M et N seront placés de sorte que $AM = 200$ km et $MN \simeq 333,33$ km

5) Encore une autre méthode : elle diffère des 2 précédentes en ce sens :

a) qu'il est ici inutile de demander de partir vers la droite avec une charge de 1000 bananes au départ de chacun des tas,

b) que l'on transporte d'abord toutes les bananes pour constituer le 1er tas M, puis que l'on transporte les bananes de M pour créer un 2e tas N.

Dénombrons les trajets :



Après les 2 AR et l'aller de A à M, le tas M comprend $3000 - 5x$ bananes. Pour qu'un AR et 1 aller soient nécessaires pour constituer le tas N, il faut que :

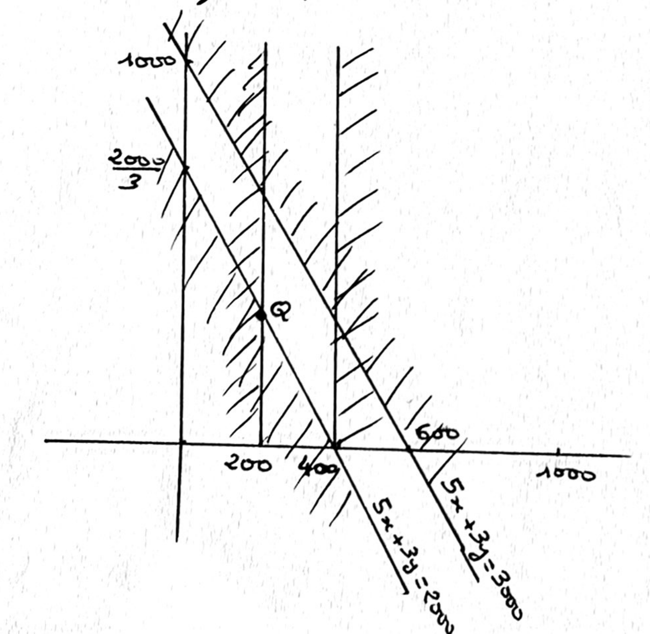
$$(1) \quad \boxed{1000 < 3000 - 5x \leq 2000}$$

Puis tout est transporté en N. Il y aura alors $3000 - 5x - 3y$ bananes en N. Pour qu'un seul aller permette de conclure, il faut que :

$$(2) \quad \boxed{0 < 3000 - 5x - 3y \leq 1000}$$

et $N(x,y) = 3000 - 5x - 3y - (1000 - x - y) = 2000 - 4x - 2y$ bananes atteindront B.

Il n'y a plus qu'à maximaliser $N(x,y)$ sur la partie admissible du plan des (x,y) définie par (1) et (2).



(1) $200 \leq x < 400$

(2) $\begin{cases} 5x + 3y \leq 3000 \\ 5x + 3y \geq 2000 \end{cases}$

Le maximum est atteint en $Q\left(200, \frac{1000}{3}\right)$ pour $x = 200$ et $y = \frac{1000}{3}$

Ma petite Brigitte –

Mon Dane –

– Je suis heureux de savoir que Yannick suit les traces de son frère. Grâce à vous deux, cet enfant sait lire et écrire au C.P. Tout lui sera facile. Il ne faut pas tenir compte de ce que j'écris à savoir : j'attache une grande importance à l'instruction et, pour cause : comprendre les livres, revues scientifiques etc... je ne saisis que le $\frac{1}{10}$ de l'article et je râle...

– Revenons au problème des 3 saints. Si tu double ce que j'ai, je te donne 6,00. Au 3e saint, il ne lui reste plus rien.

~~Tu as dû faire une erreur dans tes calculs~~. Naturellement ~~conséquence~~; ~~le graphique est juste~~.

Voyons ta résolution.		La mienne.
$x + 2x - 6 = (3x - 6)$	1er saint	: $2x - 6$
$(3x-6) + 2(3x-6) - 6 = \boxed{9x - 24}$	2e saint	: $2(2x-6) - 6 = 4x - 18$
$(9x-24) + 2(9x-24) - 6 = 27x - 78$	3e saint	: $2(4x-18) - 6 = 8x - 42$
soit $x = 2,90$ par excès.		soit $x = 5,25$

Preuve

$3x - 6 = 8,70 - 6 = 2,70$	$5,25 \times 2 = 10,50 - 6 = 4,50$
$9x - 24 = 26,1 - 24 = 2,10$	$4,5 \times 2 = 9 - 6 = 3$
$27x - 78 = 78,3 - 78 = 0,3$	$3 \times 2 = 6 - 6 = 0$
0,3 provient des $x = 2,90$ par excès	
c'est valable	

Je pense que les 2 solutions sont valables.

– En voici un autre problème : 2 prés sont à faucher. Le 1er a une aire double du second. Des faucheurs travaillent au grand pré pendant $\frac{1}{2}$ journée,

puis, l'équipe des faucheurs se scinde en 2 (groupes égaux). Un des groupes fauche le grand pré et le termine en fin de journée ; tandis que le 2ème groupe entame le petit pré, mais ne le termine pas en fin de journée. Un faucheur passe la journée du lendemain à achever.

Combien d'ouvriers cette équipe compte-t-elle ?

<u>Mon raisonnement</u>

a ①	a ①

a ②

soit x le Nbre de chauffeurs. x doit être un nombre pair, puisqu'ils se divisent en deux équipes égales.

Nous aurons pour ① : $x + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ journée $+ \frac{1}{2}$ journée $= 1j = 2a$. **[A]**

" " pour ② $\frac{x}{2} + 1$ (faucheur) $= \frac{1}{2}$ journée $+ 1$ jour $= 1j\frac{1}{2} = a$ **[B]**

Pour qu'il y ait égalité il faut et il suffit que le faucheur qui travaille toute la journée, doit le terminer en $\frac{1}{2}$ journée soit : 2 faucheurs

donc [B] $= \frac{x}{2} + 2 = \frac{1}{2}$ journée $+ \frac{1}{2}$ journée $= 1$ jour $= a$.

donc $\frac{[A]}{2} = [B]$ ou $[A] = 2[B]$ soit : $\frac{x + \frac{x}{2}}{2} = \frac{x}{2} + 2$

ou $\frac{3x}{4} = \frac{x}{2} + 2$

ou $3x = 2x + 8$; $x = \boxed{8}$

Preuve pour ① : $8 + \frac{8}{2} = 12$ faucheurs

pour 2 : $\frac{8}{2} + 2 = 6$ faucheurs

Le collègue a pris 2 inconnus : x le nombre de faucheurs et y l'aire fauchée en 1 journée

il en arrive à $\frac{xy}{4} = 2y$ donc $x = 8$ (trop long pour moi).

Peut être trouveras-tu une 3e solution !

Je vous embrasse tous bien affectueusement.

Votre Papy. qui vous aime.

<u>Dan</u> : chaque faucheur fauche a m² en 1 journée. Soit $2x$ le nombre de faucheurs.

<u>1-champs</u> : $2x \cdot \frac{1}{2} \cdot a + x \cdot \frac{1}{2} \cdot a = \frac{3ax}{2}$ m² fauchés.

<u>2-champs</u> : $x \cdot \frac{1}{2} \cdot a + 1 \cdot a = \frac{ax}{2} + a$.

Equation : $\frac{3ax}{2} = 2\left(\frac{ax}{2} + a\right) \Rightarrow x = 4$ donc $2 \times 4 = 8$ faucheurs.

Exercice : Un camion rempli de caisses traverse 5 postes frontières. A chaque poste frontière, on lui retient les $\frac{1}{3}$ de la cargaison et le tiers d'une caisse. Trouver le nombre de caisses contenues dans le camion au départ sachant qu'à l'arrivée, le camion contient un nbre entier de caisses.

Solution : Soit b le nombre de caisses au départ. Après le passage du 1- poste frontière, le camion ne contient plus que $f(b) = \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}$ caisses.
A l'arrivée, il contiendra : $f^5(b) = \frac{32b - 211}{243}$ caisses.
$f^5(b)$ sera entier ssi $\exists k \in \mathbb{Z}$ $\quad 32b - 243k = 211 \quad (1)$
L'algorithme d'Euclide donne la solution particulière :

$$32 \times 8018 - 243 \times 1055 = 211$$

d'où la solution générale de (1) : $\begin{cases} b = 243\eta + 8018 \\ k = 32\eta + 1055 \end{cases}$ où $\eta \in \mathbb{Z}$

Le nombre de caisses minimum au départ sera obtenu pour $\eta = -32$: on trouve <u>b = 242 caisses</u>.
